PART4　定積分で表された関数

例題

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

第17講　PART4 確認問題

1　等式 $f(x)=3x^2+x\int_0^1 f(t)dt+3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=$ ア x^2+ イ $x+3$

2　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-5x+3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$f(x)=$ ウ $x-$ エ

$a=$ オ , $\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$

PART4　定積分で表された関数

例題

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)　$\int_0^3 f(t)dt=k$ とおくと　　$f(x)=x+k$

このとき　$k=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^3 (t+k)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+kt\right]_0^3=\frac{9}{2}+3k$

よって　$k=\frac{9}{2}+3k$ から $k=-\frac{9}{4}$　　したがって　$f(x)=x-\frac{9}{4}$

(2)　$\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ ……① の両辺を x で微分すると

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^2-5x+6)$　　よって　$f(x)=2x-5$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=a^2-5a+6$

すなわち　$0=a^2-5a+6$

よって　$(a-2)(a-3)=0$ より　$a=2$，3

練習

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)　$\int_0^2 f(t)dt=k$ とおくと　$f(x)=3x^2-kx+2$

このとき　$k=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(3t^2-kt+2)dt=\left[t^3-\frac{k}{2}t^2+2t\right]_0^2=12-2k$

よって　$k=12-2k$ から $k=4$

したがって　$f(x)=3x^2-4x+2$

(2)　$\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ …… ① の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(2x^2-9x+4)$$

よって　$f(x)=4x-9$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=2a^2-9a+4$

すなわち　$0=2a^2-9a+4$

よって　$(2a-1)(a-4)=0$ より　$a=\frac{1}{2}$，4

第17講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：8

[解説]

$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=k$ とおくと [A]

$$f(x)=3x^2+kx+3$$

このとき　$\displaystyle k=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (3t^2+kt+3)dt$

$$=\left[t^3+\frac{k}{2}t^2+3t\right]_0^1$$

$$=4+\frac{k}{2}$$

よって　$k=4+\dfrac{k}{2}$　から　$k=8$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2+8x+3}$

[A]　$\displaystyle\int_a^b f(t)dt=k$ (a，b，k は定数)
とおくことができる。

2

[正解] ウ：4，エ：5，オ：1，カ：3，キ：2

[解説]

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=2x^2-5x+3$　……①　の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(2x^2-5x+3)$$ [B]

よって　$\boldsymbol{f(x)=4x-5}$

また，①で $x=a$ のとき

$$\int_a^a f(t)dt=2a^2-5a+3$$ [C]

すなわち　$0=2a^2-5a+3$

よって　$(a-1)(2a-3)=0$　より

$$\boldsymbol{a=1,\ \frac{3}{2}}$$

[B]　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (a は定数)

[C]　$\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$